

PN Übergang

Sebastian Schwerdhöfer



Hauptseminar zu Grundlagen der Experimentellen Physik
im SS. 2012

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
pro Energie
Gesamtdichte
MWG

Diode im
GGW

Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

Diode unter
Spannung

Bändermodell
Herleitung
der Shockley-
Gleichung

Ziel: Shockley-Gleichung der Diodenkennlinie

$$I(U) = I_S \cdot \left(\exp\left(\frac{U}{n \cdot U_T}\right) - 1 \right)$$

Weg:

- ▶ Dichte freier Ladungsträger im Halbleiter
- ▶ Diode im GGW
- ▶ Diode unter Spannung

Ein stieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
pro Energie
Gesamtdichte
MWG

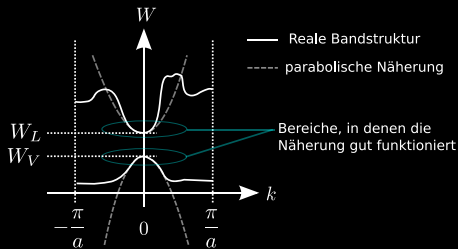
Diode im
GGW

Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

Diode unter
Spannung

Bändermodell
Herleitung
der Shockley-
Gleichung

Rückblick: Zustandsdichte in der Parabelnäherung



$$W = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m_{\text{eff}}} + W_L$$

⇒ näherungsweise kontinuierliche Zustandsdichten:

$$g_L(W) = A \sqrt{W - W_L}$$

($g = \frac{2}{V} \frac{dN}{dW}$: Anzahl von Elektronenzuständen pro Energieintervall pro Volumen in Leitungsband)

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte

Trägerdichte

pro Energie

Gesamtdichte

MWG

Diode im GGW

Raumladungszone

Bandverschiebung

Diffusionsspannung

Einschub

Diode unter Spannung

Bändermodell

Herleitung

der Shockley-

Gleichung

Anzahl von Elektronen im Leitungsband pro Energieintervall pro Volumen
= Zustandsdichte \times Besetzungswahrscheinl. (Fermiverteilung)

$$\tilde{n}(W, T) = g_L(W) \cdot f(W, T)$$

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte

Trägerdichte pro Energie

Gesamtdichte
MWG

Diode im
GGW

Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

Diode unter
Spannung

Bändermodell
Herleitung
der Shockley-
Gleichung

Anzahl von Elektronen im Leitungsband pro Volumen
= Integral über Ladungsträgerdichte \tilde{n} entlang des
Leitungsbandes

$$n = \int_{LB} \tilde{n}(W, T) dW = \int_{\text{Unterkante LB}}^{\text{Oberkante LB}} g_L(W) \cdot f(W, T) dW$$

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
pro Energie

Gesamtdichte

MWG

Diode im
GGW

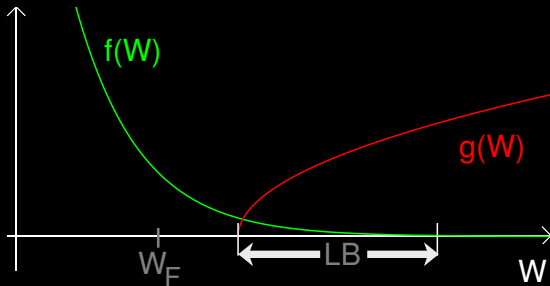
Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

Diode unter
Spannung

Bändermodell
Herleitung
der Shockley-
Gleichung

Näherung der Gesamtdichte

$$f(W, T) \approx \underbrace{\exp\left(-\frac{W - W_F}{k_B T}\right)}_{\text{Boltzmann Näherung}}, \quad g(W) = A\sqrt{W - W_L}$$



$$n = \int_{LB}^{\infty} g_L(W) \cdot f(W, T) dW \approx \int_{W_L}^{\infty} g_L(W) \cdot f(W, T) dW$$

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte

Trägerdichte pro Energie

Gesamtdichte

MWG

Diode im GGW

Raumladungszone

Bandverschiebung

Diffusionsspannung

Einschub

Diode unter Spannung

Bändermodell

Herleitung der Shockley-Gleichung

$$\begin{aligned} n &= \int_{W_L}^{\infty} g_L(W) \cdot f(W, T) dW \\ &= \int_{W_L}^{\infty} A \sqrt{W - W_L} \cdot \exp\left(-\frac{W - W_F}{k_B T}\right) \cdot dW \end{aligned}$$

Gesamtdichte der freien Elektronen im Leitungsband:

$$n = N_L \exp\left(-\frac{W_L - W_F}{k_B T}\right)$$

Mit äquivalenter Zustandsdichte $N_L \propto (k_B T)^{3/2}$

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
pro Energie

Gesamtdichte

MWG

Diode im
GGW

Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

Diode unter
Spannung

Bändermodell
Herleitung
der Shockley-
Gleichung

Analog ist die Gesamtdichte der freien Löcher im Valenzband:

$$p = N_V \exp\left(-\frac{W_F - W_V}{k_B T}\right)$$

Mit äquivalenter Zustandsdichte $N_V \propto (k_B T)^{3/2}$

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte

Trägerdichte

pro Energie

Gesamtdichte

MWG

Diode im
GGW

Raumladungszone

Bandverschiebung

Diffusionsspannung

Einschub

Diode unter
Spannung

Bändermodell

Herleitung
der Shockley-
Gleichung

Der *undotierten* Halbleiter ist elektrisch neutral:

$n = p =: n_i$ (n_i : intrinsische Ladungsträgerdichte)

$$n_i^2 = n \cdot p \quad (\text{Massenwirkungsgesetz})$$

Mit dem MWG kann n_i berechnet werden:

$$n_i = \sqrt{n \cdot p} = \sqrt{N_L \cdot N_V} \cdot \exp\left(-\frac{W_{\text{Gap}}}{2k_B T}\right)$$

mit

$$W_{\text{Gap}} := W_L - W_V$$

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
pro Energie
Gesamtdichte

MWG

Diode im
GGW

Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

Diode unter
Spannung

Bändermodell
Herleitung
der Shockley-
Gleichung

- ▶ Ladungsträgererzeugung mit konstanter Rate $A(T)$
- ▶ Rekombinationsrate \propto Anzahl der Ladungsträger

\Rightarrow Veränderung der Elektronendichte also:

$$\frac{dn}{dt} = A(T) - B(T) \cdot n \cdot p$$

Im Gleichgewicht gilt:

$$\frac{dn}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad n \cdot p = \frac{A(T)}{B(T)}$$

Freie Elektronen: $n \approx n_D$ (Störstellenerschöpfung)

Freie Löcher:

$$p = \frac{A(T)}{B(T)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{A(T)}{B(T)} \cdot \frac{1}{n_i \cdot \frac{n_D}{n_i}} = \underbrace{\frac{A(T)}{B(T)} \cdot \frac{1}{n_i}}_{=p_i=n_i} \cdot \frac{1}{n_D/n_i} = \frac{n_i^2}{n_D}$$

$$\Rightarrow \quad n_i^2 = n \cdot p$$

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte

Trägerdichte

pro Energie

Gesamtdichte

MWG

Diode im
GGW

Raumladungszone

Bandverschiebung

Diffusionsspannung

Einschub

Diode unter
Spannung

Bändermodell

Herleitung

der Shockley-

Gleichung

Analoge Überlegungen zeigen das Massenwirkungsgesetz auch im p-dotierten Halbleiter.

⇒ Das Massenwirkungsgesetz gilt im GGW in undotierten *und* dotierten HL

⇒ Die intrinsische Ladungsträgerdichte beträgt somit

$$n_i = \sqrt{n \cdot p} = \sqrt{N_L \cdot N_V} \cdot \exp\left(-\frac{W_{\text{Gap}}}{2k_B T}\right)$$

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
pro Energie
Gesamtdichte

MWG

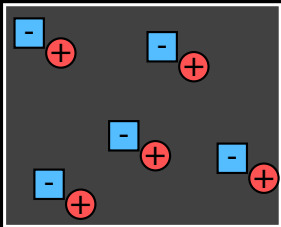
Diode im GGW

Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

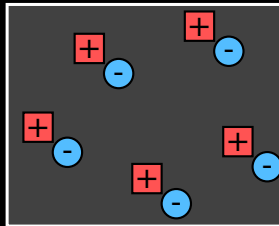
Diode unter Spannung

Bändermodell
Herleitung der Shockley-Gleichung

p-dot



n-dot



Eingezeichnet sind nur (ionisierte) Störstellen.
In Kästen: Ortsfeste Rumpfe
In Kreisen: bewegliche Ladungsträger

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
pro Energie
Gesamtdichte
MWG

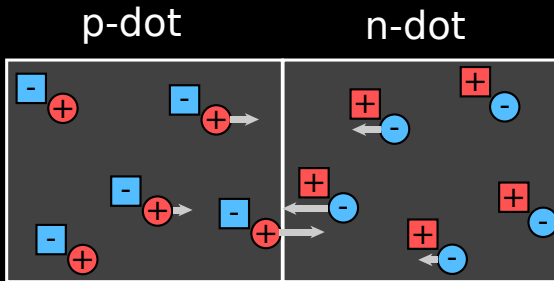
Diode im
GGW

Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

Diode unter
Spannung

Bändermodell
Herleitung
der Shockley-
Gleichung

Diffusionsstrom bei Kontakt



Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
pro Energie
Gesamtdichte
MWG

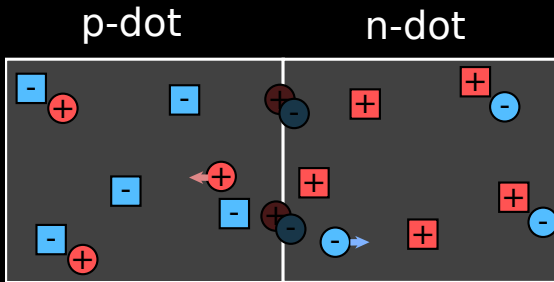
Diode im
GGW

Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

Diode unter
Spannung

Bändermodell
Herleitung
der Shockley-
Gleichung

Entgegengesetzter Feldstrom



Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
pro Energie
Gesamtdichte
MWG

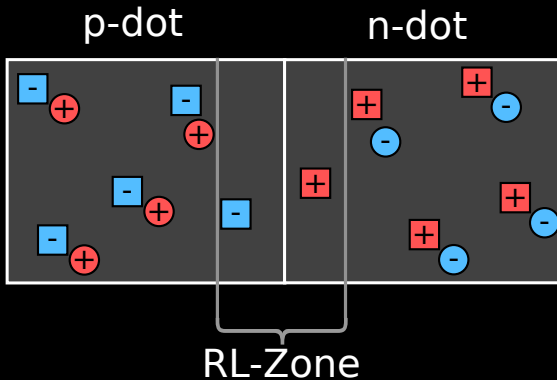
Diode im
GGW

Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

Diode unter
Spannung

Bändermodell
Herleitung
der Shockley-
Gleichung

Raumladungszone im GGW



Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
pro Energie
Gesamtdichte
MWG

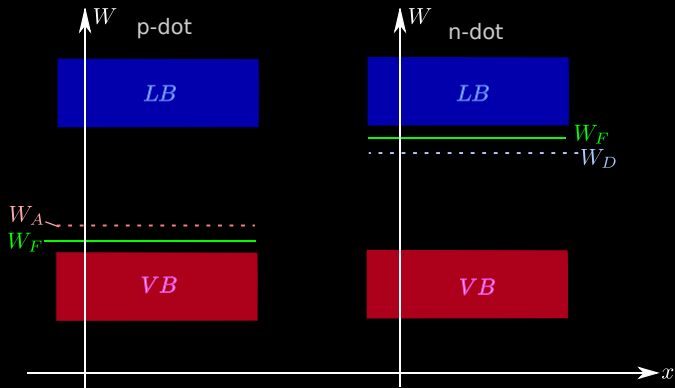
Diode im
GGW

Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionspannung
Einschub

Diode unter
Spannung

Bändermodell
Herleitung
der Shockley-
Gleichung

Bändermodell dotierter Halbleiter (ohne Kontakt)



Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
Gesamtdichte
MWG

Diode im GGW

Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

Diode unter Spannung

Bändermodell
Herleitung der Shockley-Gleichung

- ▶ Weit weg von der RL-Zone: Ladungsträgerdichten identisch zum kontaktlosen Fall.
⇒ Abstände zw Fermienergie und Bandkanten identisch zum kontaktlosen Fall!
- ▶ Überall: Im GGW einheitliches Fermienergie

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
pro Energie
Gesamtdichte
MWG

Diode im GGW

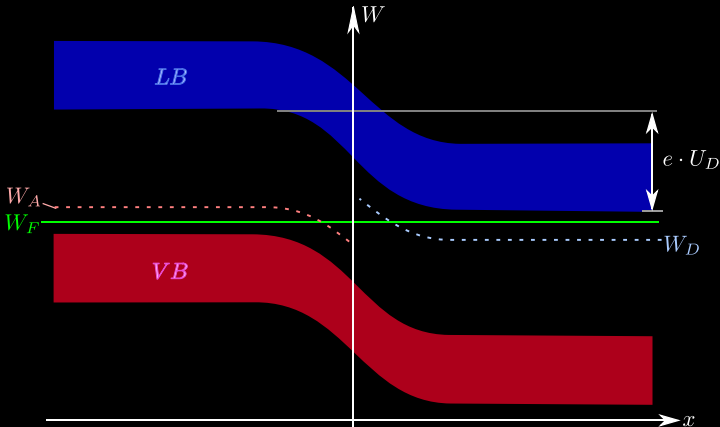
Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

Diode unter Spannung

Bändermodell
Herleitung der Shockley-Gleichung

Bandverschiebung bei Kontakt

- ▶ Weit weg von der RL-Zone: Identische Bandstruktur.
- ▶ Überall: einheitliches Fermi-niveau



Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
pro Energie
Gesamtdichte
MWG

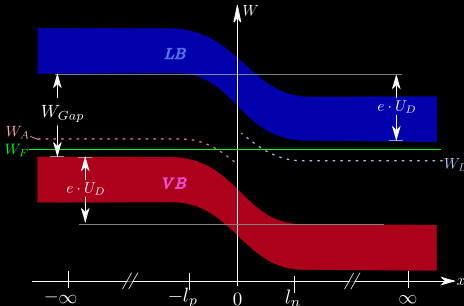
Diode im
GGW

Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

Diode unter
Spannung

Bändermodell
Herleitung
der Shockley-
Gleichung

Formeln zur Berechnung der Diffusionsspannung



$$e \cdot U_D = W_L(-\infty) - W_L(+\infty)$$

$$n_N = N_L \exp\left(-\frac{W_L(+\infty) - W_F}{k_B T}\right)$$

$$p_P = N_V \exp\left(-\frac{W_F - W_V(-\infty)}{k_B T}\right)$$

$$W_{Gap} = W_L(-\infty) - W_V(-\infty)$$

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
Gesamtdichte
MWG

Diode im
GGW

Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

Diode unter
Spannung

Bändermodell
Herleitung
der Shockley-
Gleichung

Berechnen der Diffusionsspannung 2

Formeln aus der Graphik:

$$n_N = N_L \exp\left(-\frac{W_L(+\infty) - W_F}{k_B T}\right); \quad p_P = N_V \exp\left(-\frac{W_F - W_V(-\infty)}{k_B T}\right)$$

$$W_{\text{Gap}} = W_L(-\infty) - W_V(-\infty); \quad e \cdot U_D = W_L(-\infty) - W_L(+\infty);$$

Annahme: Störstellenerschöpfung: $n_N \approx n_D \quad \wedge \quad p_P \approx n_A$

$$\Rightarrow n_D \cdot n_A = n_N \cdot p_P = N_L N_V \exp\left(-\frac{W_L(+\infty) - W_V(-\infty)}{k_B T}\right)$$

$$n_D \cdot n_A = N_L N_V \exp\left(-\frac{W_L(+\infty) - W_L(-\infty) + W_{\text{Gap}}}{k_B T}\right)$$

$$= \underbrace{N_L N_V \exp\left(-\frac{W_{\text{Gap}}}{k_B T}\right)}_{=n_i^2} \cdot \exp\left(-\frac{\overbrace{W_L(+\infty) - W_L(-\infty)}^{e \cdot U_D}}{k_B T}\right)$$

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
pro Energie
Gesamtdichte
MWG

Diode im
GGW

Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

Diode unter
Spannung

Bändermodell
Herleitung
der Shockley-
Gleichung

$$\Rightarrow n_D \cdot n_A = n_i^2 \exp\left(-\frac{e \cdot U_D}{k_B T}\right)$$

$$U_D = U_T \ln\left(\frac{n_A \cdot n_D}{n_i^2}\right), \quad U_T := \frac{k_B T}{e}$$

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
pro Energie
Gesamtdichte
MWG

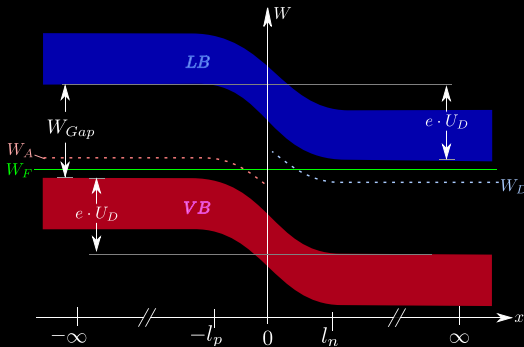
Diode im
GGW

Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

Diode unter
Spannung

Bändermodell
Herleitung
der Shockley-
Gleichung

Löcherdichte p_n^0 am rechten Rand der RL-Zone im GGW



$$p_n^0 := p_n(l_n) = N_V \exp\left(-\frac{W_F(-\infty) - W_V(l_n)}{k_B T}\right)$$

$$= N_V \exp\left(-\frac{W_F(-\infty) - (W_V(-\infty) - e \cdot U_D)}{k_B T}\right)$$

$$= N_V \exp\left(-\frac{(W_F(-\infty) - W_V(-\infty)) + e \cdot U_D}{k_B T}\right)$$

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
Gesamtdichte
MWG

Diode im GGW

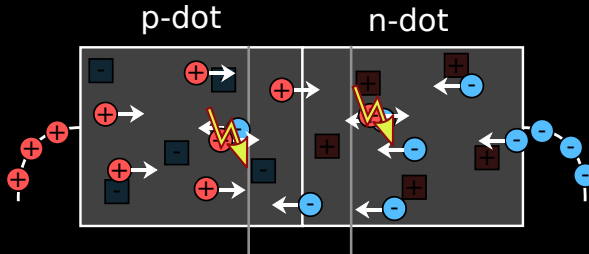
Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung

Einschub

Diode unter Spannung

Bändermodell
Herleitung der Shockley-Gleichung

Diode in Durchlassrichtung - Qualitativ



- ▶ Spannung treibt Majoritätsträger in die RL Zone und auf die "andere Seite" wo es Minoritätsträger sind.
- ▶ Shockley: Innerhalb der RL-Zone keine Rekombination
- ▶ Eindringtiefe von Minoritätsträgern wird durch Rekombination beschränkt.
⇒ Die Minoritätsdichte fällt nach außen ab.

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
pro Energie
Gesamtdichte
MWG

Diode im
GGW

Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

Diode unter
Spannung

Bändermodell
Herleitung
der Shockley-
Gleichung

Überlegungen zum Bändermodell

- ▶ Angelegte Spannung U reduziert Potentialunterschied von U_D auf $U_D - U$.
- ▶ Kein GGW \Rightarrow Quasi-Ferminiveaus (Imrefs) zur Beschreibung der Ladungsträgerdichten.
- ▶ Außerhalb der RL-Zone: Majoritätsdichte unverändert.
 \Rightarrow Abstand zwischen $W_{F,Maj}$ und entsprechenden Bandkanten wie im GGW.
- ▶ An den Rändern: Minoritätsdichte unverändert (begrenzte Eindringtiefe der Minoritäten).
 \Rightarrow Abstand zwischen $W_{F,Min}$ und entsprechenden Bandkanten wie im GGW.
- ▶ Nähert man sich der RL-Zone: Minoritätsdichte nimmt im VGL zum GGW zu.
 \Rightarrow Aufspaltung von W_F in zwei Quasi-Fermi-Niveaus für Minoritäten (zu- bzw abnehmend) und Majoritäten (gleichbleibend).

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
pro Energie
Gesamtdichte
MWG

Diode im GGW

Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

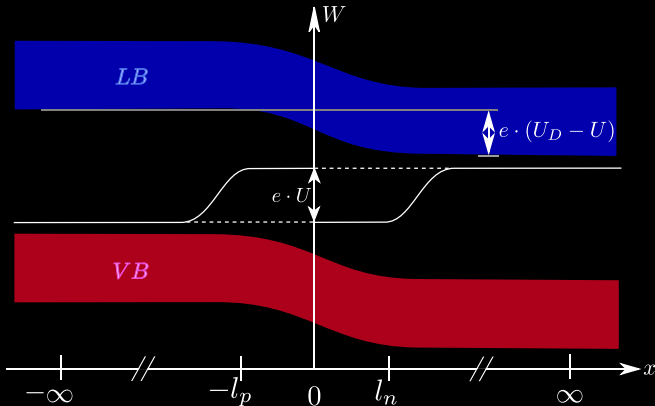
Diode unter Spannung

Bändermodell

Herleitung der Shockley-Gleichung

Ergebnis der Überlegungen

- ▶ El. Potentialunterschied: $U_D - U$.
- ▶ Am Rand: Dichten wie im GGW.
- ▶ Außerhalb der RL Zone: $|W_{F,Maj} - W_{Maj, \text{Bandkante}}|$ wie im GGW.
- ▶ Näher an der RL-Zone: $|W_{F,Min} - W_{Min, \text{Bandkante}}|$ abnehmend im VGL zum GGW.



Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
pro Energie
Gesamtdichte
MWG

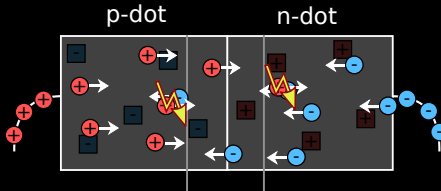
Diode im GGW

Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

Diode unter Spannung

Bändermodell
Herleitung der Shockley-Gleichung

Annahme (Näherung): Keine Rekombination von injizierten Minoritäten in der RL Zone.



Weitere Näherung: Vernachlässigung von Feldströmen

⇒ Betrachtung reduziert sich auf Diffusionsstrom der Minoritätsträger am Rand der RL Zone

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
pro Energie
Gesamtdichte
MWG

Diode im GGW

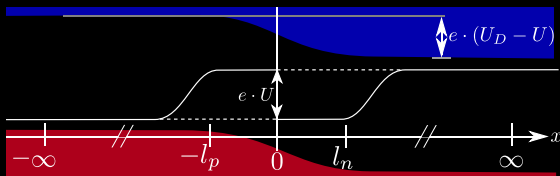
Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

Diode unter Spannung

Bändermodell

Herleitung der Shockley-Gleichung

Löcherdichte am rechten Rand der RL-Zone



$$p(l_n) = N_V \cdot \exp\left(-\frac{W_F(-\infty) - W_V(l_n)}{k_B T}\right)$$

$$W_V(l_n) = W_V(-\infty) - e \cdot (U_D - U)$$

$$p(l_n) = N_V \cdot \exp\left(-\frac{(W_F(-\infty) - W_V(-\infty)) + e \cdot U_D}{k_B T}\right) \cdot \exp\left(\frac{e \cdot U}{k_B T}\right)$$

=: p_n^0 , Löcherdichte im n-Bereich ohne Spannung

$$\Rightarrow p(l_n) = p_n^0 \cdot \exp\left(\frac{e \cdot U}{k_B T}\right)$$

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte pro Energie
Gesamtdichte
MWG

Diode im GGW

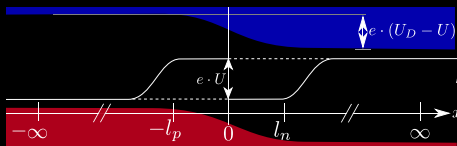
Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

Diode unter Spannung

Bändermodell

Herleitung der Shockley-Gleichung

Löchergradient am rechten Rand der RL-Zone



Formeln:

$$p(l_n) = p_n^0 \cdot \exp\left(\frac{e \cdot U}{k_B T}\right)$$

Überschuss am rechten Rand der RL Zone:

$$\Delta p(l_n) = p(l_n) - p_n^0 = p_n^0 \cdot \left(\exp\left(\frac{e \cdot U}{k_B T}\right) - 1\right)$$

Der Überschuss nimmt nach rechts durch Rekombination exponentiell ab:

$$\Delta p(x) = \Delta p(l_n) \cdot \exp\left(-\frac{l_n - x}{L_p}\right)$$

$$\Delta p(x) = \underbrace{p_n^0 \cdot \left(\exp\left(\frac{e \cdot U}{k_B T}\right) - 1\right)}_{\Delta p(l_n)} \cdot \exp\left(-\frac{l_n - x}{L_p}\right)$$

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
pro Energie
Gesamtdichte
MWG

Diode im
GGW

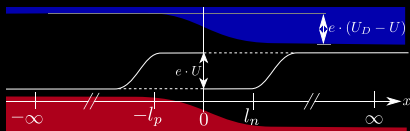
Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

Diode unter
Spannung

Bändermodell

Herleitung
der Shockley-
Gleichung

Löcherstrom am rechten Rand der RL-Zone



Formeln:

$$\Delta p(x) = p_n^0 \cdot \left(\exp\left(\frac{e \cdot U}{k_B T}\right) - 1 \right) \cdot \exp\left(\frac{l_n - x}{L_p}\right)$$

$$j_{p,D}(l_n) = -e \cdot D_p \cdot \frac{\partial p}{\partial x}(x = +l_n)$$

Einsetzen von $\Delta p(x)$ möglich, da $\partial_x \Delta p(x) = \partial_x p(x)$

$$j_{p,D}(l_n) = \frac{e \cdot D_p}{L_p} p_n^0 \cdot \left(\exp\left(\frac{e \cdot U}{k_B T}\right) - 1 \right)$$

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte

Trägerdichte

pro Energie

Gesamtdichte

MWG

Diode im GGW

Raumladungszone

Bandverschiebung

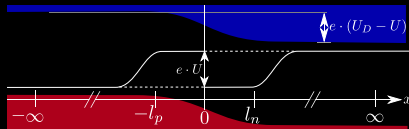
Diffusionsspannung

Einschub

Diode unter Spannung

Bändermodell

Herleitung der Shockley-Gleichung



Analog zum Löcherstrom am rechten Rand der RL-Zone erhalten wir den Elektronenstrom am linken Rand der RL-Zone:

$$j_{n,D}(-l_p) = \frac{e \cdot D_n}{L_n} n_p^0 \cdot \left(\exp\left(\frac{e \cdot U}{k_B T}\right) - 1 \right)$$

Die gesamte Diffusionsstromdichte beträgt also:

$$j_D = j_{p,D} + j_{n,D} = e \cdot \left(\frac{D_p}{L_p} p_n^0 + \frac{D_n}{L_n} n_p^0 \right) \cdot \left(\exp\left(\frac{e \cdot U}{k_B T}\right) - 1 \right)$$

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
pro Energie
Gesamtdichte
MWG

Diode im
GGW

Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

Diode unter
Spannung

Bändermodell

Herleitung
der Shockley-
Gleichung

$$I(U) = j \cdot A = A \cdot \underbrace{\left(\frac{D_p}{L_p} p_n^0 + \frac{D_n}{L_n} n_p^0 \right)}_{=: I_S, \text{ Sperrstrom}} \cdot \left(\exp \left(\frac{e \cdot U}{k_B T} \right) - 1 \right)$$

$$I(U) = I_S \cdot \left(\exp \left(\frac{U}{n \cdot U_T} \right) - 1 \right) \quad U_T := \frac{k_B T}{e}$$

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
pro Energie
Gesamtdichte
MWG

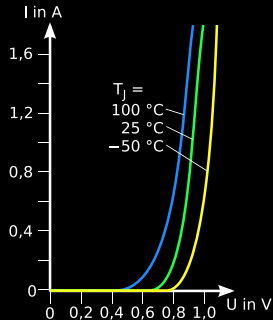
Diode im
GGW

Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

Diode unter
Spannung

Bändermodell
Herleitung
der Shockley-
Gleichung

$$I(U) = I_S \cdot \left(\exp\left(\frac{U}{n \cdot U_T}\right) - 1 \right)$$



(Diodenkennlinie vom Typ 1N4001)

Einstieg

Ladungsträgerdichte

Zustandsdichte
Trägerdichte
pro Energie
Gesamtdichte
MWG

Diode im
GGW

Raumladungszone
Bandverschiebung
Diffusionsspannung
Einschub

Diode unter
Spannung

Bändermodell

Herleitung
der Shockley-
Gleichung